

# Solusi efek terobosan penghalang ganda dengan persamaan Schrödinger dua dimensi

B Supriadi<sup>1,a</sup>, S H B Prastowo<sup>1</sup>, A F Amrullah<sup>1</sup>, dan Z R Ridlo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Pendidikan Fisika, Universitas Jember, Jl Kalimantan no 37, Jember, Indonesia

<sup>a</sup>bambangsscmsc@gmail.com

**Abstrak.** Kami telah dapatkan solusi dari salah satu masalah mekanika kuantum yaitu efek terobosan penghalang potensial ganda menggunakan hamburan dua dimensi, dan elektron adalah partikel kuantum yang bisa menerobos penghalang dengan suatu probabilitas. Khusus pada hamburan dua dimensi, kami amati fenomena efek terobosan pada energi dibawah potensial penghalang. Efek terobosan ini kami analogikan dengan sifat pembiasan yang merupakan sifat khas dari gelombang. Elektron yang terefraksi terletak dalam bidang datang dengan sudut datang dan sudut bias sepanjang daerah penghalang, serta elektron dari penghalang akan dibiaskan di sepanjang daerah partikel bebas. Hasil akhirnya kami dapat memprediksi peluang elektron yang dapat menerobos penghalang dalam bentuk koefisien transmisi pada penghalang pertama dan penghalang kedua. Besarnya koefisien transmisi tergantung pada lebar penghalang secara cosinus hiperbolis.

## 1. Pendahuluan

Mekanika kuantum adalah cabang ilmu fisika yang dapat menjawab persoalan yang menyangkut inti atom, atom, molekul, dan materi dalam zat padat daripada mekanika klasik. Ilmu ini memberikan kerangka matematika untuk berbagai cabang fisika dan kimia. Persamaan schrödinger merupakan pondasi dalam sistem mekanika kuantum, salah satu aplikasi persamaan schrödinger untuk potensial konstan adalah efek terobosan[1].

Dioda termasuk aplikasi dari efek terobosan, prinsip dasar operasi pada efek terobosan dioda bergantung pada model efek terobosan penghalang ganda, pengoperasian sebagian besar penghantar bergantung pada lapisan semikonduktor yang sangat tipis yang terbentuk pada sambungan P/N seperti AlGaAs/GaAs [2]. Pada lapisan ini, elektron mengalir sepanjang heterojunction (sambungan yang dibentuk antara dua material semikonduktor dengan *bandgap* berbeda yang mempunyai ketipisan kurang lebih 100 Å). Sambungan GaAs-AlGaAs-GaAs-AlGaAs-GaAs adalah urutan bahan dioda, keberadaan persimpangan bahan berbeda adalah alasan terjadinya penghalang pada struktur tersebut, dan lebar penghalang sesuai dengan ketebalan AlGaAs. Kedua penghalang ini cukup tipis sehingga elektron bisa menerobos.

Penelitian ini menggunakan persamaan schrödinger dua dimensi karena pada hakikatnya gelombang memiliki sifat refraksi, sehingga elektron juga mempunyai sifat refraksi. Sekarang, diasumsikan medium sebelum dan sesudah penghalang adalah medium 1 dan penghalang sebagai medium 2. Elektron datang dari medium kurang rapat ke medium yang lebih rapat menyebabkan elektron akan mendekati garis normal, dan elektron yang datang dari medium rapat ke medium kurang rapat menyebabkan elektron akan menjauhi garis normal, sehingga sudut bias sangat berpengaruh

terhadap arah gerak elektron [3]. Penelitian ini bertujuan menemukan solusi efek terobosan penghalang ganda dengan persamaan Schrödinger dua dimensi.

## 2. Metode Penelitian

Persamaan Schrödinger tak bergantung waktu yang menggambarkan elektron bermassa  $m_e$  dalam ruang satu dimensi bergerak melintasi suatu penghalang potensial yang bernilai konstan  $V_0$  oleh:

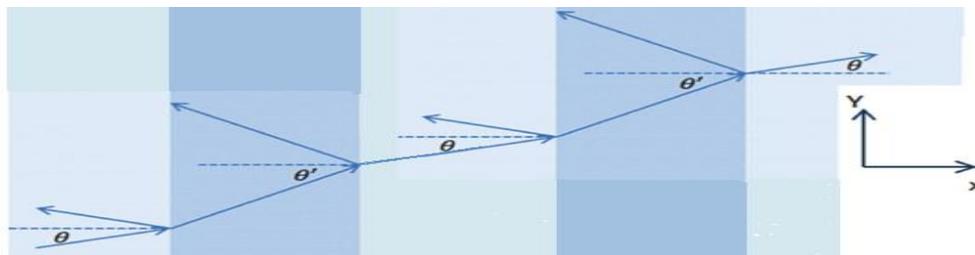
$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

dimana  $E$  adalah energi total elektron. Solusi dari persamaan ini menghasilkan nilai eigen energi yang diijinkan  $E_n$  dan fungsi gelombang yang sesuai  $\psi_n(x)$ . Untuk mengatasi persamaan diferensial parsial ini, perlu menentukan potensial  $V_0$  dan juga kondisi batas yang dapat diperoleh dari persyaratan fisik sistem [4].

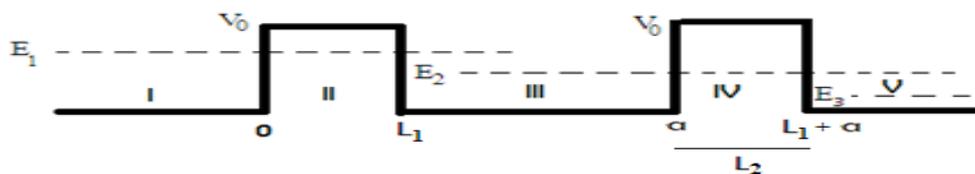
Dalam hal ini untuk sebuah elektron datang dengan energi  $E$ , vektor gelombang yang sesuai adalah  $k_x = k = \hbar^{-1}\sqrt{2m_e E}$ . Di daerah penghalang dengan tinggi sama dengan  $V_0$ , diperoleh  $k' = \hbar^{-1}\sqrt{2m_e(E - V_0)}$ . Oleh karena itu, untuk  $E < V_0$ ,  $k$  adalah imajiner, sementara untuk  $E > V_0$  memiliki propagasi osilasi.

Sekarang, jika kasus sistem 2 dimensi. Sebuah elektron dengan energi  $E$  dan sudut datang  $\theta$ , energi elektron didalam daerah penghalang adalah  $E - V_0$  dengan sudut bias  $\theta'$  (gambar 1), karena translasi ke arah  $y$  tidak berubah, maka nilai dan arah vektor gelombang elektron dalam arah ini kekal [5].

$$\begin{aligned} k_y &= k'_y \\ k \sin \theta &= k' \sin \theta' \end{aligned} \quad (2)$$



(a)



(b)

**Gambar 1.** Efek terobosan penghalang ganda sistem 2 dimensi (a) skema sistem 2 dimensi daerah gelap adalah lapisan penghalang dan berkas elektron ditunjukkan oleh anak panah, elektron dari kiri (daerah I) menuju penghalang dengan sudut datang  $\theta$  terhadap garis normal (garis putus-putus), sebagian terpantul ke daerah I, di daerah II elektron mengalami refleksi dengan sudut  $\theta'$ , transmisi daerah III dengan sudut  $\theta$ , dan seterusnya; (b) profil energi penghalang 1 dimensi dan energi awal elektron  $E < V_0$ .

Persamaan Shrödinger bebas waktu untuk  $E < V_0$  di daerah I, II, III, IV, dan V adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y) &= Ae^{ik_x x + ik_y y} + Be^{-ik_x x + ik_y y}, \\ \psi_2(x, y) &= Ce^{k'_x x + k_y y} + De^{-k'_x x + k_y y}, \\ \psi_3(x, y) &= Ee^{ik_x x + ik_y y} + Fe^{-ik_x x + ik_y y}, \\ \psi_4(x, y) &= Ge^{k'_x x + k_y y} + He^{-k'_x x + k_y y}, \\ \psi_5(x, y) &= Ie^{ik_x x + ik_y y}\end{aligned}\tag{3}$$

Pertama, diturunkan formula untuk koefisien Transmisi untuk penghalang pertama

$$\psi(x, y) \begin{cases} \psi_1(x, y) = Ae^{ik_x x + ik_y y} + Be^{-ik_x x + ik_y y}, & x \leq 0 \\ \psi_2(x, y) = Ce^{k'_x x + k_y y} + De^{-k'_x x + k_y y}, & 0 < x < L_1 \\ \psi_3(x, y) = Ee^{ik_x x + ik_y y}, & x \geq L_1 \end{cases}$$

Selanjutnya, diterapkan syarat kontinuitas  $\psi(x)$  dan  $\frac{d\psi(x)}{dx}$  di  $x = 0$  diperoleh

$$\begin{aligned}\psi_1(x = 0) &= \psi_2(x = 0) \\ Ae^{ik_y y} + Be^{ik_y y} &= Ce^{k_y y} + De^{k_y y}\end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\psi'_1(x = 0) &= \psi'_2(x = 0) \\ ik_x Ae^{ik_y y} - ik_x Be^{ik_y y} &= k'_x Ce^{k_y y} - k'_x De^{k_y y}\end{aligned}\tag{5}$$

dan di  $x = L_1$  diperoleh

$$\begin{aligned}\psi_2(x = L_1) &= \psi_3(x = L_1) \\ Ce^{k'_x L_1 + k_y y} + De^{-k'_x L_1 + k_y y} &= Ee^{ik_x L_1 + ik_y y}\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}\psi'_2(x = L_1) &= \psi'_3(x = L_1) \\ k'_x Ce^{k'_x L_1 + k_y y} - k'_x De^{-k'_x L_1 + k_y y} &= ik_x Ee^{ik_x L_1 + ik_y y}\end{aligned}\tag{7}$$

Eliminasi  $ik_x Be^{ik_y y}$ , dengan cara persamaan (4) dikali dengan  $ik_x$  dan dijumlah dengan persamaan (5), dihasilkan :

$$A = \frac{Ce^{k_y y}(ik_x + k'_x) + De^{k_y y}(ik_x - k'_x)}{2ik_x e^{ik_y y}}\tag{8}$$

Eliminasi  $k'_x De^{-k'_x L_1 + k_y y}$ , dengan cara persamaan (6) dikali dengan  $k'_x$  dan dijumlah dengan persamaan (7), dihasilkan :

$$C = \frac{Ee^{ik_x L_1 + ik_y y}(k'_x + ik_x)}{2k'_x e^{k'_x L_1 + k_y y}}\tag{9}$$

Eliminasi  $k'_x Ce^{k'_x L_1 + k_y y}$ , dengan cara persamaan (6) dikali dengan  $k'_x$  dan dikurangi dengan persamaan (7), dihasilkan

$$D = \frac{Ee^{ik_x L_1 + ik_y y}(k'_x - ik_x)}{2k'_x e^{-k'_x L_1 + k_y y}}\tag{10}$$

substitusi persamaan (9) dan (10) kedalam persamaan (8)

$$\frac{A}{E} = \frac{e^{ik_x L_1}}{4ik_x k'_x} \left[ \frac{(ik_x + k'_x)^2}{e^{k'_x L_1}} + \frac{(ik_x - k'_x)(k'_x - ik_x)}{e^{-k'_x L_1}} \right]$$

$$\frac{A^*}{E^*} = \frac{e^{ik_x L_1}}{-4ik_x k'_x} \left[ \frac{(-ik_x + k'_x)^2}{e^{k'_x L_1}} + \frac{(-ik_x - k'_x)(k'_x + ik_x)}{e^{-k'_x L_1}} \right]$$

Sehingga koefisien transmisi untuk penghalang pertama  $T_{2D1}$  didapatkan

$$T_{2D1} = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{E E^*}{A A^*} = \frac{8k_x^2 k'^2}{(k_x^2 + k'^2)^2 \cosh(2k'_x L_1) - (k_x^4 - 6k_x^2 k'^2 + k'^4)} \quad (11)$$

Kedua, diturunkan formula untuk koefisien transmisi untuk penghalang kedua

$$\psi(x, y) \begin{cases} \psi_3(x, y) = E e^{ik_x x + ik_y y} + F e^{-ik_x x + ik_y y}, & x \leq a \\ \psi_4(x, y) = G e^{k'_x x + k_y y} + H e^{-k'_x x + k_y y}, & a < x < L_1 + a \\ \psi_5(x, y) = I e^{ik_x x + ik_y y}, & x \geq L_1 + a \end{cases}$$

Dengan cara yang sama seperti pada penghalang pertama, sehingga koefisien transmisi untuk penghalang kedua  $T_{2D2}$  didapatkan

$$T_{2D2} = \frac{|I|^2}{|E|^2} = \frac{I I^*}{E E^*} = \frac{8k_x^2 k'^2}{(k_x^2 + k'^2)^2 \cosh(2k'_x L_2) - (k_x^4 - 6k_x^2 k'^2 + k'^4)} \quad (12)$$

Koefisien transmisi total akibat dari penghalang pertama dan kedua  $T_{tot}$  adalah

$$T_{tot} = T_{2D1} \cdot T_{2D2} \quad (13)$$

Koefisien transmisi 2D akan dibandingkan dengan koefisien transmisi 1D, dalam bukunya Zattelli untuk koefisien transmisi 1D adalah [4]:

$$T_{1D} = \frac{4k^2 k'^2}{4k^2 k'^2 + (k^2 + k'^2)^2 \sinh^2(k' L_1)} \quad (14)$$

### 3. Hasil Penelitian dan Pembahasan

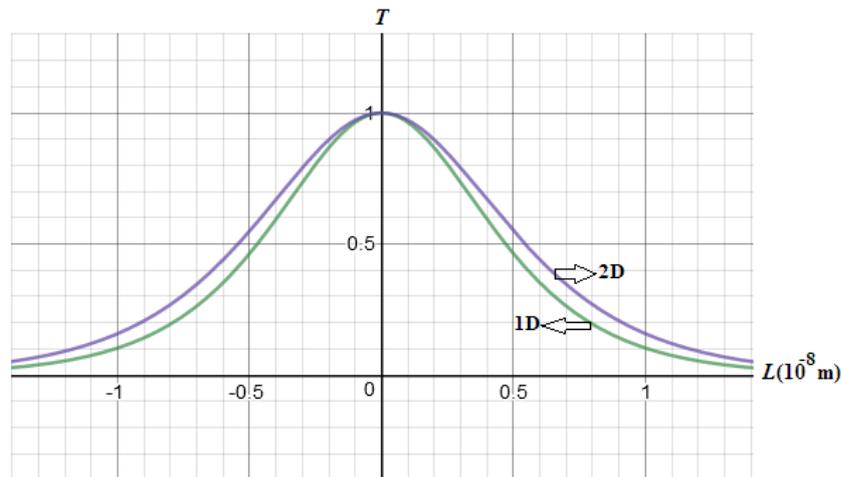
Hasil perhitungan koefisien transmisi menggunakan data awal bahan AlGaAs berupa energi awal  $E = 1,22 \times 10^{-1} (eV)$ , besar potensial  $V_0 = 1,64 \times 10^{-1} (eV)$  dan lebar penghalang pertama dibuat berubah-ubah [6]. Untuk pendekatan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi diasumsikan sudut datang ialah  $30^\circ$  dari garis normal, sedangkan untuk pendekatan menggunakan persamaan Schrodinger satu dimensi sudut datang ialah  $0^\circ$  dari garis normal terlihat pada Tabel 1.

**Tabel 1.** Data koefisien transmisi pada penghalang pertama menggunakan persamaan Schrodinger satu dimensi dan dua dimensi.

$E(eV)$	$V_0(eV)$	$L_1(m)$	$T_{1D}$	$T_{2D1}$
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$4 \times 10^{-9}$	0,5937	0,6690
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$8 \times 10^{-9}$	0,1937	0,2684
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$1,2 \times 10^{-8}$	0,0535	0,0905
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$1,6 \times 10^{-8}$	0,0142	0,0290

#### 3.1. A subsection

Bentuk grafik sebagai fungsi dari lebar penghalang pertama dengan menggunakan aplikasi *browser* berupa Desmos (*graphing*). Grafik antara koefisien transmisi dan lebar penghalang pertama menggunakan persamaan Schrodinger satu dimensi dibandingkan dengan menggunakan persamaan Schrodinger dua dimensi diperoleh hasil sebagai berikut:



**Gambar 2.** Perbandingan grafik antara koefisien transmisi dan lebar penghalang pertama dengan menggunakan persamaan Schrodinger satu dan dua dimensi untuk  $E = 1,22 \times 10^{-1} eV$  dan  $L_1 = 4 \times 10^{-8} m$ .

Elektron dapat dikatakan menerobos suatu penghalang meskipun energi datangnya lebih kecil daripada potensial penghalang, ketika memiliki sebuah nilai koefisien transmisi. Koefisien transmisi dengan pendekatan 1D maupun 2D sama-sama bergantung pada lebar penghalang sebagaimana yang terlihat pada persamaan (14) dan (11). Energi datang elektron ( $E$ ) dan potensial penghalang ( $V_0$ ) dibuat konstan, sedangkan lebar penghalang pertama  $L_1$  dibuat berbeda. Berdasarkan Tabel 1, semakin besar nilai dari lebar penghalang semakin kecil nilai koefisien transmisi, hal ini disebabkan oleh koefisien transmisi berbanding terbalik dengan cosinus hiperbolik dari lebar penghalang.

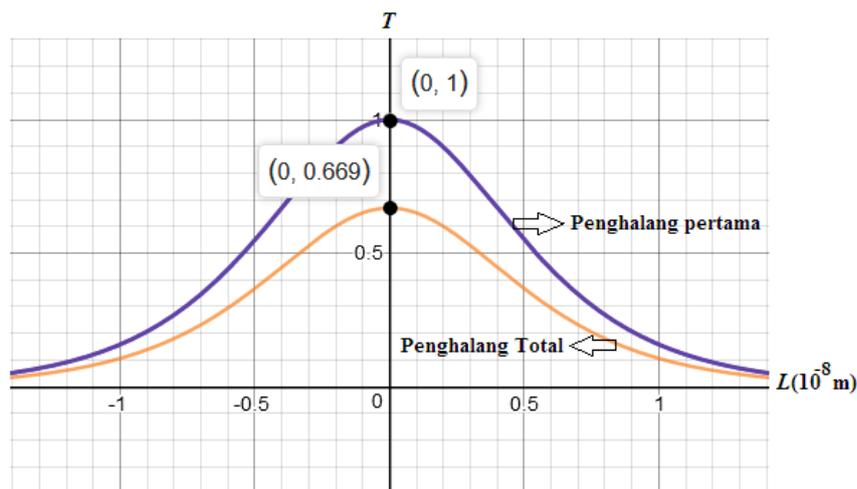
Koefisien transmisi pada masing-masing pendekatan didapatkan nilai yang berbeda, meskipun lebar penghalangnya sama. Nilai koefisien transmisi dengan pendekatan 2D ( $T_{2D1}$ ) lebih besar daripada nilai koefisien transmisi dengan pendekatan 1D ( $T_{1D}$ ), karena  $T_{2D1}$  bergantung pada  $k_x$  dan  $k'_x$  sedangkan  $T_{1D}$  bergantung pada nilai  $k$  dan  $k'$  terlihat pada persamaan (11) dan (14). Nilai  $k_x = k \cos \theta$  dan  $k'_x = k' \cos \theta$ , karena nilai  $k_x < k$  dan  $k'_x < k'$  maka nilai  $\cosh(2k'_x L)$  sebagai pembagi pada persamaan  $T_{2D1}$  lebih kecil daripada nilai  $\sinh^2(k'L)$  sebagai pembagi pada persamaan  $T_{1D}$ , sehingga nilai  $T_{2D1} > T_{1D}$ . Ini berarti bahwa ketika menggunakan pendekatan 2D, elektron memiliki dua peluang untuk menerobos yaitu pada sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ , pada masing-masing sumbu memberi peluang berupa nilai koefisien transmisi, sedangkan untuk pendekatan 1D hanya pada sumbu  $x$  saja peluang untuk menerobos.

Hasil perhitungan koefisien transmisi total menggunakan data awal bahan AlGaAs berupa  $E = 1,22 \times 10^{-1} (eV)$  besar potensial  $V_0 = 1,64 \times 10^{-1} (eV)$ , lebar penghalang pertama  $L_1 = 4 \times 10^{-9} (m)$  dan lebar penghalang kedua  $L_2$  dibuat berubah-ubah. Untuk pendekatan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi diasumsikan sudut datang ialah  $30^\circ$  dari garis normal terlihat pada Tabel 2.

**Tabel 2.** Data koefisien transmisi penghalang total.

$E(eV)$	$V_0(eV)$	$L_1(m)$	$L_2(m)$	$T_{tot}$
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$4 \times 10^{-9}$	0	0,6690
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$4 \times 10^{-9}$	$4 \times 10^{-9}$	0,4476
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$4 \times 10^{-9}$	$8 \times 10^{-9}$	0,1796
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$4 \times 10^{-9}$	$1,2 \times 10^{-8}$	0,0605
$1,22 \times 10^{-1}$	$1,64 \times 10^{-1}$	$4 \times 10^{-9}$	$1,6 \times 10^{-8}$	0,0194

Perbandingan grafik koefisien transmisi penghalang pertama menggunakan persamaan Schrodinger dua dimensi dibandingkan dengan koefisien transmisi penghalang total menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi diperoleh hasil sebagai berikut:



**Gambar 3.** Perbandingan grafik antara koefisien transmisi penghalang pertama dan penghalang total dengan menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi, untuk penghalang total (penghalang pertamanya  $L_1 = 4 \times 10^{-9}m$ ).

Koefisien transmisi menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi pada penghalang pertama bergantung pada lebar penghalang pertama, sedangkan koefisien transmisi menggunakan persamaan schrodinger dua dimensi pada penghalang total bergantung pada lebar penghalang pertama dan kedua. Energi datang elektron ( $E$ ), potensial penghalang ( $V_0$ ), dan lebar penghalang pertama  $L_1$  dibuat konstan, sedangkan lebar penghalang kedua  $L_2$  dibuat berubah-ubah. Berdasarkan Tabel 2, semakin besar nilai dari lebar penghalang kedua semakin kecil nilai koefisien transmisi penghalang total terlihat pada Tabel 2, hal ini disebabkan oleh koefisien transmisi penghalang total berbanding terbalik dengan sinus hiperbolik dari lebar penghalang pertama dan kedua terlihat pada persamaan (13). Terlihat jelas pada gambar 3, bahwa grafik untuk koefisien transmisi penghalang total meskipun lebar penghalang kedua nol meter, didapatkan nilai koefisien transmisi penghalang total tidak sama dengan 1, karena sudah ditransmisi dahulu oleh penghalang pertama. Ini berarti semakin banyak penghalang maka nilai koefisien transmisi penghalang total semakin kecil.

#### 4. Kesimpulan

Elektron dapat dikatakan menerobos suatu penghalang meskipun energi datangnya lebih kecil daripada potensial penghalang, ketika memiliki sebuah nilai koefisien transmisi. ketika menggunakan pendekatan 2D, elektron memiliki dua peluang untuk menerobos yaitu pada sumbu  $x$  dan sumbu  $y$ , pada masing-masing sumbu memberi peluang berupa nilai koefisien transmisi, sedangkan untuk pendekatan 1D hanya pada sumbu  $x$  saja peluang untuk menerobos. Sehingga pendekatan menggunakan persamaan Schrodinger dua dimensi lebih teliti daripada pendekatan menggunakan persamaan Schrodinger satu dimensi. Dan semakin banyak jumlah penghalang maka nilai koefisien transmisi semakin kecil.

#### Referensi

- [1] Sutopo 2005 *Pengantar Fisika Kuantum* (Malang: UM Press)
- [2] Datta S 1999 *Electronic Transport in Mesoscopic System* (Britania Raya: Cambridge University Press)
- [3] Halliday et al 2011 *Fundamental of Physics Ninth Edition* (NewYork: John Willey & Son Inc.)
- [4] Zettili N 2009 *Quantum Mechanics Concepts and Application: Second Edition* (Jacksonville USA: John Willey & Son Ltd)
- [5] Mohammadpour H 2016 On the 2D Quantum Tunneling *Acta Physica Polonica A. B* **130** 3
- [6] Harrison P 2005 *Quantum Wells, Wires and Dots: Theoretical and Computational Physics of Semiconductor Nanostructures Second Edition* (New York: John Willey & Son Inc.)